Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Einführendes Beispiel

Welche von allen Konservendosen gleichen Inhalts hat den geringsten Materialverbrauch?

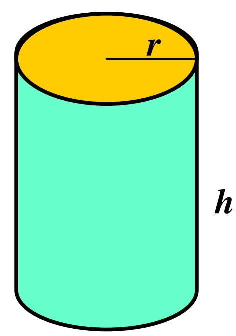
Bei einer solchen Fragestellung wird einiges unausgesprochen vorausgesetzt. Natürlich gibt es auch Konservendosen z.B. in Quaderform – aber hier ist wohl vom Üblichen auszugehen, also einer Konservendose in der Form eines geraden Zylinders. Und von Falzen oder anderen Dingen, die die reine Zylinderform stören, ist selbstverständlich abzusehen.

1. Zusammenhänge klären, Bezeichnungen festlegen

Der Materialverbrauch wird eindeutig durch die ***Oberfläche*** des Zylinders bestimmt. Diese ist also zu minimieren (→ *„geringsten Materialverbrauch“*). Die Maße des Zylinders und folglich die Größe seiner Oberfläche werden durch den ***Grundkreisradius*** und die ***Höhe*** festgelegt, allerdings nicht unabhängig voneinander, denn das ***Volumen*** soll sich nicht ändern (→ *„gleichen Inhalts“*).

Für die relevanten Größen führt man Bezeichnungen ein:

A =	Oberfläche des Zylinders
V =	Volumen des Zylinders
r =	Grundkreisradius des Zylinders
h =	Höhe des Zylinders



Von diesen Größen ist V keine echte Variable: V ist zwar unbekannt, soll sich aber nicht ändern. Solche unechten Variablen nennt man ***Parameter***. Dagegen sind A,r,h ***echte Variable***. Wir stellen das in einer Übersicht zusammen:

echte Variable:	$A;\ r,h$
Parameter:	V
Funktion:	$A = A(r,h)$
Aufgabenstellung:	$A \overset{!}{=} \text{minimal}$

Das Ausrufezeichen bezeichnet den Auftrag („soll sein“); und $A = A(r,h)$ ist folgendermaßen zu lesen: „die Größe A ist abhängig von den Größen r,h“ oder auch „A ist eine Funktion von r,h“.

Diese Schreibweise ist praktisch und in diesem Zusammenhang üblich, obwohl man nicht ganz zu unrecht einwenden könnte, daß A auf der linken Seite als eine Variable und auf der rechten als ein Funktionsbezeichner verwendet wird.

2. Nebenbedingungen und Zielfunktion

Die Oberfläche eines Zylinders setzt sich zusammen aus der Mantelfläche ($2\pi rh$) und zweimal der Grundfläche ($2\cdot\pi r^2$):

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Das ist die Beziehung, die bei 1. abstrakt mit $A = A(r,h)$ bezeichnet wurde. Die Variablen r,h sind aber nicht unabhängig voneinander, sie sind durch eine sogenannte ***Nebenbedingung*** aneinander gekoppelt. Hier ist das die

Nebenbedingung: $\quad V = \pi r^2 h$

Legt man sich z.B. bei r auf einen konkreten Wert fest, so ist h nicht mehr frei, sondern aus der Nebenbedingung berechenbar, denn V ist ja ein Parameter. Man kann daher die Abhängigkeit von A von bisher zwei Größen (nämlich r,h) auf eine reduzieren. Würde man die Nebenbedingung nach r auflösen, käme eine Wurzel ins Spiel. Da man sich die Arbeit aber so einfach wie möglich machen will, wird man die Nebenbedingung nach h auflösen:

$$V = \pi r^2 h$$
$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

und dies bei A oben einsetzen:

$$A = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Die Funktionsgleichung von A enthält jetzt nur noch eine unabhängige Variable, nämlich r. Wir haben die sogenannte ***Zielfunktion*** gefunden. Für sie ist jetzt der Definitionsbereich festzulegen (eine wichtige Aufgabe, die leider oft sträflicherweise unterbleibt). Offenbar kann r als Nenner nicht 0 sein, aber auch negative Werte sind für einen Radius nicht sinnvoll. Ansonsten sind keine Einschränkungen erkennbar, so daß der Definitionsbereich aus allen positiven reellen Zahlen besteht, also dem offenen Intervall von 0 bis ∞:

Zielfunktion: $A = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 \quad \text{für} \quad r \in \left]0, \infty\right[$

3. Bestimmung des Extremums

Die Zielfunktion wird jetzt auf Extrema untersucht. Das geht mit einer Kurvendiskussion, die man allerdings nur insoweit durchführt, als für die Bestimmung der Extrema unbedingt erforderlich. Auf jeden Fall sollte man beginnen mit dem

Randverhalten der Zielfunktion

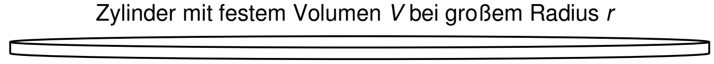
Man untersucht die Zielfunktion, wenn die unabhängige Variable einen Randwert des Definitionsintervalls annimmt (das ist hier nicht möglich) oder einem solchen zustrebt, d.h. man bestimmt den Grenzwert. Für $r \to 0$ wird der erste Summand unendlich groß, während der zweite gegen 0 strebt, und für $r \to \infty$ ist es umgekehrt, insgesamt:

$$A \to \infty \text{ für } r \to 0+0$$
$$A \to \infty \text{ für } r \to \infty$$

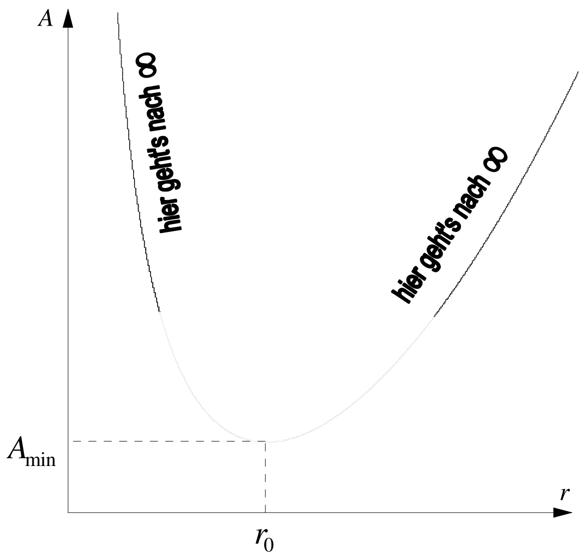
Mit dem angehängten „+0“ deuten wir an, daß die Annäherung aus dem Positiven heraus erfolgt. Die Bilder veranschaulichen die Situationen.

Zylinder mit festem Volumen V bei kleinem Radius r

Zylinder mit festem Volumen V bei großem Radius r



Am besten erstellt man sich eine (im Moment natürlich nur sehr vage) Skizze des Graphen der Funktion $r \mapsto A$.



Man kennt ja das Randverhalten und weiß, daß die Oberfläche A niemals negativ werden kann. Der Graph muß also an einer Stelle $r_0 > 0$ einen tiefsten Punkt im I. Quadranten besitzen. Dort befindet sich das Minimum der Oberfläche.

Bei r_0 besitzt der Graph eine waagerechte Tangente. Deshalb bestimmen wir die

Nullstellen der Ableitung der Zielfunktion

Wir differenzieren und verwenden die Schreibweise von Ableitungen als Differentialquotienten. Das ist bei zwei Variablen so üblich - wir haben ja keinen Funktionsbezeichner (natürlich könnten wir $f(r)$ statt A schreiben)! Wer das nicht kennt, muß sich nur Folgendes merken: Oben im „Bruch“ steht hinter dem d die abhängige, unten die unabhängige Variable; ansonsten wird wie üblich abgeleitet. Man verwendet zwar die Bruchschreibweise, trotzdem handelt es sich links nicht um einen echten Zahlenbruch. Es ist einfach nur eine andere Schreibweise für $f'(r)$:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$$

Und hiervon bestimmen wir jetzt die Nullstellen:

$$-\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$$4\pi r^3 = 2V$$

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Unser gesuchtes r_0 ist also $r_0 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$. Dieses Ergebnis ist jetzt zu rechtfertigen.

Rechtfertigung des Ergebnisses

Bei einer differenzierbaren Funktion verschwindet die Ableitung an einer Stelle, an der sich ein lokales Extremum befindet. Umgekehrt muß aber an einer Stelle, an der die Ableitung 0 wird, kein lokales Extremum liegen. Nun gibt es hinreichende Kriterien, die die erste oder zweite Ableitung verwenden. In unserem Falle geht es aber viel einfacher. Wir argumentieren nämlich folgendermaßen:

> Aufgrund des Randverhaltens existiert ein globales Minimum.
> An der zugehörigen *r*-Stelle verschwindet die erste Ableitung.
> Es gibt nur eine Stelle, an der die erste Ableitung verschwindet.
> Also befindet sich dort auch das globale Minimum.

Die gründliche Untersuchung des Randverhaltens erspart uns also hier eine weitere Rechnung. Und so ist das bei den meisten Extremwertaufgaben dieser Art. Und wenn es einmal nicht so geht, dann muß man das globale Minimum (Maximum) durch Vergleich der lokalen Minima (Maxima) und eventuell der Randwerte bestimmen.

4. Deutung des Ergebnisses

Das Ergebnis sollte nun noch sinnvoll gedeutet werden, denn der gefundene Wert r_0 ist nicht sehr anschaulich. Mit Hilfe der Nebenbedingung aus 2. berechnen wir das zugehörige h_0:

$$h_0 = \frac{V}{\pi\cdot\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{V}{\pi}}{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\cdot\frac{\frac{V}{2\pi}}{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\cdot\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r_0$$

Der Materialverbrauch ist am geringsten, wenn die Höhe der Dose und der Durchmesser des Grundkreises gleich sind.

Etwas lax gesprochen, muß die Dose also genau so breit wie hoch sein. Wenn sie z.B. $V = 1\,\text{Liter} = 1000\,\text{cm}^3$ fassen soll, so berechnet man

$$h_0 = 2\cdot\left(\frac{1000\,\text{cm}^3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 10{,}84\,\text{cm}\,,$$

die 1-Liter-Dose mit minimaler Oberfläche ist also fast 11 cm breit und hoch.

Abstrakte Beschreibung des Verfahrens

Eine Größe A soll extremal (d.h. minimal oder maximal) werden:

$$A \overset{!}{=} \text{extremal}$$

1. Zusammenhänge klären, Bezeichnungen festlegen

   A hängt in der Regel von mehreren Variablen u,v,w, ... ab; daneben können noch Konstanten a,b,c, ... auftreten. A wird zwar auch durch a,b,c, ... bestimmt, die Minimalität oder Maximalität von A interessiert jedoch nur im Hinblick auf die Änderung von u,v,w, ... Die Konstanten heißen in diesem Zusammenhang Parameter:

echte Variable:	A; $u,v,w,\ldots$
Parameter:	$a,b,c,\ldots$
Funktion:	$A = A(u,v,w,\ldots)$
Aufgabenstellung:	$A \overset{!}{=} \text{extremal}$

2. Nebenbedingungen und Zielfunktion

   Zwischen den Variablen und Parametern $u,v,w,\ldots\,;\, a,b,c,\ldots$ bestehen Beziehungen, d.h. Gleichungen, die sogenannten

Nebenbedingungen:	$\text{Term}_1(u,v,w,\ldots\,;\,a,b,c,\ldots) = 0$
	$\text{Term}_2(u,v,w,\ldots\,;\,a,b,c,\ldots) = 0$
	$\vdots$

   Bei geometrischen Aufgaben denke man an den Satz des *Pythagoras*, den Höhen- und Kathetensatz, ähnliche Dreiecke, den Strahlensatz, an trigonometrische Beziehungen, Längen-, Flächen- und Volumenformeln, um diese Nebenbedingungen zu finden.

   Man versucht nun, die Nebenbedingungen so nach geeigneten Variablen aufzulösen und diese im Funktionsterm zu substituieren, daß A nur noch von einer Variablen, etwa u, abhängt. Der Definitionsbereich I dieser Funktion, ein Intervall mit, sagen wir, u_{links} und u_{rechts} als Rändern (die je nach Sachlage selbst zu I dazugehören können oder auch nicht), ist sowohl durch innermathematische Gegebenheiten (z.B. Verbot der Division durch 0) als auch durch die sachlichen Vorgaben der Aufgabe bestimmt (ist u etwa eine Länge, so kann u nicht negativ sein). Auf diese Weise erhält man die

Zielfunktion:	$A = A(u)$ für $u \in I$

3. Bestimmung des Extremums

   Man studiert zunächst das

   Randverhalten der Zielfunktion

   $$\boxed{A \to ?\ \text{für}\ u \to u_{\text{links}}\ ,\quad A \to ?\ \text{für}\ u \to u_{\text{rechts}}}$$

   Gehören die Ränder zu I dazu, berechnet man einfach die Funktionswerte. In vielen Fällen kann man allein aufgrund des Randverhaltens schon auf die Existenz eines globalen Minimums (Maximums) schließen.

Um die Extremstelle zu finden, berechnet man die

Nullstellen der Ableitung der Zielfunktion

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u} = 0}$$

Mit hinreichenden Kriterien stellt man fest, ob an den Nullstellen der Ableitung lokale Extrema vorliegen. Im Verein mit dem Randverhalten kann man das gesuchte globale Extremum ermitteln. Es möge an der Stelle u_0 angenommen werden.

4. Deutung des Ergebnisses

   Die Lösung der Aufgabe wird dann durch Berechnung geeigneter der zu u_0 gehörenden Variablenwerte $v_0, w_0, \ldots$, eventuell auch durch Bestimmung des Extremalwertes A_{extremal} gedeutet und, wenn möglich, in einem einprägsamen Schlußsatz formuliert.

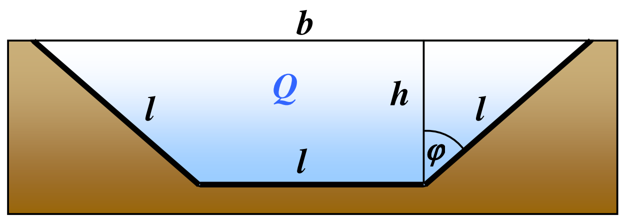
Abschließendes Beispiel

Für eine Bewässerungsanlage soll ein Kanal mit trapezförmigem Querschnitt aus drei gleich großen Betonfertigplatten gebaut werden. Wie sind die Platten anzuordnen, daß möglichst viel Wasser transportiert werden kann?

Der gesunde Menschenverstand sagt einem, daß das Trapez als gleichschenklig anzunehmen ist, auch wenn davon in der Aufgabenstellung nichts steht.

1. Zusammenhänge klären, Bezeichnungen festlegen

Durch den Kanal kann möglichst viel Wasser fließen, wenn die Querschnittsfläche Q maximal wird. Es ist auch klar, daß die Wände nicht nach innen geneigt sein können. Je nachdem, in welchem Winkel φ die Wände zur Vertikalen geneigt sind, ändern sich die Trapezhöhe h, die obere Breite b und mit ihnen die Querschnittsfläche Q. Fest ist nur die Plattenlänge l.



echte Variable:	Q; b,h,φ
Parameter:	l
Funktion:	$Q = Q(b,h,\varphi)$
Aufgabenstellung:	$Q \overset{!}{=}$ maximal

2. Nebenbedingungen und Zielfunktion

Für Q gilt nach der Flächenformel für ein Trapez

$$Q \;=\; \frac{1}{2}(b+l)\cdot h$$

Wir müssen jetzt Q in Abhängigkeit von nur einer der Größen b,h,φ ausdrücken. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Wir rechnen einmal alle Varianten durch.

VARIANTE I

Im rechtwinkligen Dreieck oben besteht nach *Pythagoras* die

Nebenbedingung:	$h^2+\left(\frac{1}{2}(b-l)\right)^2 \;=\; l^2$

Auflösung nach h ergibt:

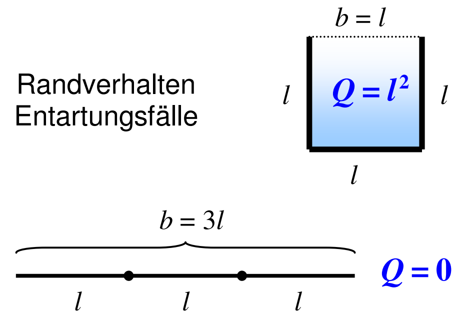
$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{1}{2}(b-l)\right)^2} \;=\; \sqrt{l^2-\frac{1}{4}(b-l)^2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{4}\left(4l^2-(b-l)^2\right)}$$

$$=\; \frac{1}{2}\sqrt{4l^2-b^2+2bl-l^2} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{3l^2-b^2+2bl}$$

Dies wird in die Q-Formel eingesetzt. Man erhält die

Zielfunktion:	$Q \;=\; \frac{1}{4}(b+l)\sqrt{3l^2-b^2+2bl}$ für $b\in\left[\,l\,,3l\,\right]$

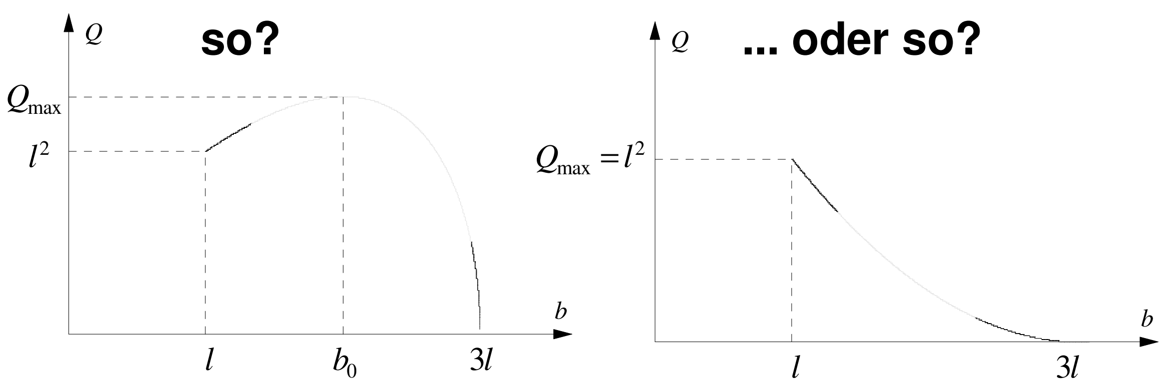
Für $b = l$ stehen die Wände senkrecht (es ist dann auch h=l), das Trapez wird zu einem Quadrat. Für $b = 3l$ entartet das Trapez zu einer Strecke der Länge $3l$, der Winkel φ wird zu einem rechten und es ist h=0. Alle b-Werte dazwischen sind sinnvoll. Ob man die Randwerte l und $3l$ zum Definitionsbereich der Funktion als Entartungsfälle dazunimmt oder nicht, ist eine Geschmacksfrage. Wir haben es oben einmal so gemacht.



3. Bestimmung des Extremums

   Die Randwerte sind $Q = l^2$ für $b = l$ und $Q = 0$ für $b = 3l$. Wie nun der Graph dazwischen verläuft, ist nicht so ohne weiteres zu sehen. Es könnte z.B. wie im ersten Bild sein, daß er zunächst ansteigt und dann zur 0 abfällt. Dann wäre das globale Maximum zugleich ein lokales Maximum, das zwischen l und $3l$ an einer Stelle b_0 angenommen würde. Es könnte aber auch wie im zweiten Bild sein, daß die Funktion nämlich streng monoton fällt. Dann würde das globale Maximum am Rande, also für $b = l$ angenommen.

möglicher Verlauf des Graphen der Funktion $b \mapsto Q$



... oder noch anders?

Um die lokalen Extrema zu bestimmen, könnte man die Zielfunktion differenzieren. Sie enthält jedoch eine Wurzel, was zu unübersichtlichen Termen führt. Wir quadrieren daher die Zielfunktion und bestimmen von dieser quadrierten Zielfunktion die möglichen Extremalstellen b, es sind dieselben wie vor dem Quadrieren. Diesen Trick darf man immer dann anwenden, wenn die Funktion keine negativen Werte annimmt (was bei dem Flächeninhalt Q ja der Fall ist), denn die relative Lage zweier nichtnegativer Zahlen ist dieselbe wie die der quadrierten Zahlen.

$$Q^2 = \frac{1}{16}(b+l)^2(3l^2 - b^2 + 2bl)$$

Beim Differenzieren bleibt der Faktor $\frac{1}{16}$ erhalten, das Produkt wird nach der Produktregel differenziert, beim ersten Faktor muß man die Kettenregel beachten –

und natürlich ist l eine Konstante:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Q^2}{\mathrm{d}b} &= \tfrac{1}{16}\Big(2(b+l)\cdot 1\cdot(3l^2-b^2+2bl) + (b+l)^2(-2b+2l)\Big) \\
&= \tfrac{1}{16}\Big(2(l+b)(3l^2-b^2+2bl) + 2(l+b)^2(l-b)\Big) \\
&= \tfrac{1}{16}2(l+b)\Big((3l^2-b^2+2bl) + (l+b)(l-b)\Big) \\
&= \tfrac{1}{8}(l+b)\Big((3l^2-b^2+2bl) + l^2-b^2\Big) = \tfrac{1}{8}(l+b)(4l^2-2b^2+2bl) \\
&= \tfrac{1}{4}(l+b)(2l^2-b^2+bl)
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q^2}{\mathrm{d}b} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (l+b)(2l^2-b^2+bl) = 0$$

Wir suchen lokale Extrema, Randstellen interessieren also nicht. Mit anderen Worten: Wir suchen alle $b\in\,]\,l\,,3l\,[$, die die letzte Gleichung erfüllen. Der erste Faktor wird für solche b schon einmal nicht 0. Es verbleibt also die Gleichung

$$b^2-l\,b-2l^2 = 0\ .$$

Diese quadratische Gleichung in b hat die Diskriminante $D=l^2+8l^2=9l^2>0$, sie besitzt daher zwei Lösungen, aber nur die positive liegt im uns interessierenden Bereich. Unsere gesuchte (mögliche) Maximalstelle ist also

$$b_0=\frac{l+3l}{2}=2l\,,$$

also genau die Mitte des Definitionsintervalls.

Rechtfertigung des Ergebnisses

Für $b_0=2l$ berechnet man $Q_0 = \frac{1}{4}(2l+l)\sqrt{3l^2-(2l)^2+2\cdot 2l\cdot l} = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2 \approx 1{,}30\,l^2$.

Dieser Wert ist größer als der Wert l^2 am linken Intervallrand. Die Funktion $b\mapsto Q$ steigt daher zunächst an, bevor sie zur 0 abfällt, es liegt daher die Situation wie beim linken Graphen auf Seite 8 vor: Es muß ein globales Maximum existieren, welches zugleich ein lokales ist. Dafür kommt aber nur die Stelle $b_0=2l$ in Frage, also wird hier das globale Maximum angenommen.

4. Deutung des Ergebnisses

Wir berechnen die zu b_0 gehörenden $h_0\,,\varphi_0$.
Die Nebenbedingung auf Seite 7 liefert:

$$h_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3l^2-(2l)^2+2\cdot 2l\cdot l} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Und das rechtwinklige Dreieck in der Figur auf Seite 7 zeigt:

$$\cos\varphi_0 = \frac{h_0}{l} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

und da der Winkel zwischen 0° und 90° liegen muß, heißt das $\varphi_0 = 30°$.

Der Kanal hat den größten Durchfluß, wenn die Wände um 30° zur Vertikalen nach außen geneigt sind.

Die Variante I haben wir ausführlich abgehandelt, bei den folgenden Varianten II und III fassen wir uns daher kürzer, da vieles analog läuft.

VARIANTE II

Wir lösen die Nebenbedingung auf Seite 7 nach b auf und finden:

$$b \;=\; l + 2\sqrt{l^2 - h^2}$$

Hiermit bestimmen wir (siehe Flächenformel auf Seite 7) die

Zielfunktion: $Q \;=\; \left(l + \sqrt{l^2 - h^2}\right) \cdot h$ für $h \in [0, l]$

3. Bestimmung des Extremums

Die Randwerte sind $Q = l^2$ für $h = l$ und $Q = 0$ für $h = 0$.

Der Trick mit dem Quadrieren hilft dieses Mal nicht weiter, weil die Wurzel dadurch nicht verschwindet. Produktregel, Summenregel und Kettenregel ergeben:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}h} &= \frac{-2h}{2\sqrt{l^2 - h^2}} \cdot h + \left(l + \sqrt{l^2 - h^2}\right) \cdot 1 \\ &= \frac{-h^2 + l\sqrt{l^2 - h^2} + \left(l^2 - h^2\right)}{\sqrt{l^2 - h^2}} \;=\; \frac{l^2 - 2h^2 + l\sqrt{l^2 - h^2}}{\sqrt{l^2 - h^2}}\end{aligned}$$

Zu bestimmen sind die Nullstellen h mit $h \in \left]0, l\right[$:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}h} = 0 \;\Leftrightarrow\; l^2 - 2h^2 + l\sqrt{l^2 - h^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; l\sqrt{l^2 - h^2} = 2h^2 - l^2$$

Wir quadrieren die letzte Gleichung. Aber Vorsicht! Das ist keine Äquivalenzumformung, denn es können sich „falsche Lösungen“ dazuschleichen.

$$l^2\left(l^2 - h^2\right) = \left(2h^2 - l^2\right)^2 \;\Leftrightarrow\; 4h^4 - 3l^2h^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; h^2\left(4h^2 - 3l^2\right) = 0$$

Die einzige Lösung für $h \in \left]0, l\right[$ ist also

$$h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l$$ (unbedingt Probe machen, da oben die Gleichung quadriert wurde!)

Die Rechtfertigung der Lösung geht wie bei Variante I durch Vergleich der Funktionswerte.

4. Deutung des Ergebnisses

Man berechnet mit der Nebenbedingung $b_0 = 2l$ und $\varphi_0 = 30°$ wie in Variante I.

VARIANTE III

Wir bringen den Winkel φ ins Spiel und erhalten mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks in der Figur auf Seite 7 die weiteren

Nebenbedingungen:	$\frac{1}{2}(b-l) = l\cdot\sin\varphi$
	$h = l\cdot\cos\varphi$

Aus der ersten errechnet man $b = l\cdot(1+2\sin\varphi)$. Setzt man b,h ein in die Flächenformel auf Seite 7, erhält man die

Zielfunktion:	$Q = l^2\cdot(1+\sin\varphi)\cdot\cos\varphi$ für $\varphi\in\left[0°\,,90°\right]$

3. Bestimmung des Extremums

Die Randwerte sind $Q=l^2$ für $\varphi=0°$ und $Q=0$ für $\varphi=90°$.

Als Ableitung erhält man nach der Faktor-, Produkt- und Summenregel:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\varphi} = l^2\cdot\left(\cos\varphi\cdot\cos\varphi-(1+\sin\varphi)\cdot\sin\varphi\right) = l^2\cdot\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi-\sin\varphi\right)$$

Zu bestimmen sind die Nullstellen φ mit $\varphi\in\left]0°\,,90°\right[$.
Mit dem trigonometrischen *Pythagoras* $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$ rechnet man:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\varphi} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos^2\varphi-\sin^2\varphi-\sin\varphi = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-2\sin^2\varphi-\sin\varphi = 0$$

In der letzten Gleichung substituieren wir $t=\sin\varphi$. Wegen der Bedingung für φ gilt $0<t<1$. Die einzige Lösung der Gleichung $1-2t^2-t=0$ in diesem Bereich ist

$$t_0=\tfrac{1}{2}\ .$$

Also gilt $\sin\varphi_0=\frac{1}{2}$, womit man

$$\varphi_0=30°$$

erhält. Daß an dieser Stelle tatsächlich das globale Maximum angenommen wird, rechtfertigt man wieder durch Vergleich des Funktionswertes mit den Randwerten.

4. Deutung des Ergebnisses

Die Werte $b_0=2l$ und $h_0=\frac{\sqrt{3}}{2}l$ kann man mit den Nebenbedingungen ermitteln.